
MINIPROJEKT–OPTIMAL CONTROL

LÖSUNG VON OC-PROBLEMEN DURCH REIHENENTWICKLUNG



Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik
Institut für Elektro- und Informationstechnik
Otto-von-Guericke-Universität
Magdeburg

RENÉ KELLING	STK105-S
KARSTEN PINNO	STK105-S
ALEXANDER ZINSER	STK205-S

28. Januar 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Optimal Control-Problem und Anwendung der Methode	3
2	Reglerdesign an speziellem Beispiel	4
2.1	Approximation der Zielfunktion und des Feedbacks	4
2.2	Vergleich von linearem und nichtlinearem Feedback für spezielle q und a	6
2.3	Simulationen für verschiedene Anfangsbedingungen und Variation von q	7

1 Optimal Control-Problem und Anwendung der Methode

Die folgende Methode wird angewendet, um eine Näherungslösung des optimalen Inputs eines OC-Problems zu erhalten. Somit wird umgangen, dass die Hamilton-Jacobi-Bellmann-Gleichung analytisch gelöst werden muss, was in den wenigsten Fällen möglich ist. (partielle Differentialgleichung) Im Folgenden wird das Problem beschrieben:

Betrachtet wird ein OC-Problem mit der folgenden nichtlinearen Dynamik:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (1)$$

Das Performanceintegral (2) stellt die Kostenfunktion dar. Es soll ein Feedback $\mathbf{u}_*(\mathbf{x})$ gefunden werden, welches dieses Integral minimiert. Bei Anfangsbedingungen \mathbf{x}_0 nahe des Ursprungs wird das System stabilisiert.

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + g(\mathbf{x}, \mathbf{u})) dt \quad (2)$$

Dabei sind $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ und $g(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ Potenzreihen zweiter bzw. dritter Ordnung und $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{N}, \mathbf{R}$ reale Matrizen mit folgenden Eigenschaften:

$$\mathbf{Q} \geq 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{R} \geq 0 \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5)$$

In [Luk69] wird gezeigt, dass das Integral unter Verwendung eines stabilisierenden Feedbacks nahe des Ursprungs konvergiert. Das Haupttheorem 1.1 postuliert die Existenz eines **optimalen, stabilisierenden** Feedbacks, welches Gleichung (6) löst.

$$\mathbf{F}_u(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_*(\mathbf{x}_0)) \mathbf{J}_x(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_*) + \mathbf{G}_u(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_*(\mathbf{x}_0)) = 0 \quad (6)$$

Zunächst wird das „truncated System“ (TS) mit den Eigenschaften $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ und $g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ gelöst. Das bedeutet, dass die Terme höherer Ordnung zunächst vernachlässigt werden. Mittels Gleichung (7) lässt sich \mathbf{P}_* berechnen, sodass das stabilisierende Feedback des TS \mathbf{D}_* nach Gleichung (8) berechnet werden kann.

$$\mathbf{0} = (\mathbf{Q} - \mathbf{N}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}) + \mathbf{P}_* (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^*) + (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^*)^* \mathbf{P}_* - \mathbf{P}_* (\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^*) \mathbf{P}_* \quad (7)$$

$$\mathbf{D}_* = -\mathbf{R}^{-1} (\mathbf{N}^* + \mathbf{B}^* \mathbf{P}_*) \quad (8)$$

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{D}_* \mathbf{x} \quad (9)$$

$$J(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_* \mathbf{x} \quad (10)$$

Ausgehend vom TS kann nun das Feedback durch nichtlineare Terme erweitert werden. Für analytische $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}_*(\mathbf{x}))$ und $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}_*(\mathbf{x}))$ nahe des Ursprungs können $\mathbf{u}_*(\mathbf{x})$, $J_*(\mathbf{x})$ und $\mathbf{F}_*(\mathbf{x})$ als Potenzreihe entwickelt werden. Nun können die Terme höherer Ordnung für $J^{(k)}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{u}_*^{(k)}(\mathbf{x})$ mit Hilfe der Gleichungen (13) und (14) bestimmt werden.

$$\mathbf{u}_*(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_*^{(1)}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_*^{(2)}(\mathbf{x}) + \dots \quad (11)$$

$$J_*(\mathbf{x}) = J^{(2)}(\mathbf{x}) + J^{(3)}(\mathbf{x}) + \dots \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_* \mathbf{x} J_{\mathbf{x}}^{(m)}(\mathbf{x}) &= - \sum_{k=3}^{m-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_*^{(m-k+1)}(\mathbf{x}) \cdot J_{\mathbf{x}}^{(k)}(\mathbf{x}) \\
&\quad - \sum_{k=2}^{m-1} \mathbf{f}^{(m-k+1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_*) \cdot J_{\mathbf{x}}^{(k)}(\mathbf{x}) \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\lfloor m-1/2 \rfloor} \mathbf{u}_*^{(k)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{R} \mathbf{u}_*^{(m-k)}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_*^{(m/2)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{R} \mathbf{u}_*^{(m/2)}(\mathbf{x}) \\
&\quad - \mathbf{g}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_*)
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\mathbf{u}_*^{(k)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \left(\mathbf{B}^* J_{\mathbf{x}}^{(k+1)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{f}_{\mathbf{u}})^{(j)} J_{\mathbf{x}}^{(k-j+1)}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{\mathbf{u}}^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_*) \right) \tag{14}$$

Die Stabilität des geschlossenen Kreises Laut Theorem 1.1 existiert für das gegebene Problem ein eindeutiges und stabilisierendes Feedback. Dies zeigt sich auch am Zeitverlauf des geschlossenen Kreises (Abbildung 2). Bei steigender Ordnung der Potenzreihe und des dazu entwickelten Inputs vergrößert sich der stabile Bereich um den Ursprung.

Einschränkungen und Nachteil der Methode Das System muss stabilisierbar sein. Dazu muss eine Matrix \mathbf{D} existieren, sodass gilt: $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}$ ist stabil. Eine Matrix heißt stabil, wenn der Realteil aller Eigenwerte echt negativ ist. Außerdem müssen die Nichtlinearitäten der Dynamik und des Performanceintegrals in der Nähe des Ursprungs analytisch und differenzierbar sein. Wenn nicht der Ursprung, sondern eine andere Ruhelage stabilisiert werden soll, kann dieses Problem durch eine Koordinatentransformation umgestaltet werden, sodass der Ursprung als neue Ruhelage mit einem solchen Feedback optimal geregelt wird.

Probleme bei der Erweiterung zu einem MIMO-System

- Aufwendiges Gleichungssystem zur Berechnung von $\mathbf{J}^{(k)}$ mittels Ansatz (13)
- Berechnung von \mathbf{P}_* für das TS ist nichtlineares Gleichungssystem (7)
- Aufwendige Reihenentwicklung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

2 Reglerdesign an speziellem Beispiel

2.1 Approximation der Zielfunktion und des Feedbacks

OC-Problem (Zielfunktion und Dynamik)

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^{\infty} \left(q \cosh(x(t)) - q + \frac{1}{2} u^2(t) \right) dt \tag{15}$$

$$\dot{x} = ax + u \tag{16}$$

Reihenentwicklung der Nichtlinearität der Zielfunktion

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \dots \tag{17}$$

Daraus ergibt sich:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^{\infty} \left(q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - q + \frac{1}{2} u^2(t) \right) dt \quad (18)$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{q}{2} x^2 + \frac{1}{2} u^2 + \underbrace{q \frac{x^4}{24} + q \frac{x^6}{720} + q \frac{x^8}{40320}}_{g(x,t)} \right) dt \quad (19)$$

Löse „truncated System“

$$\mathbf{Q} = \frac{q}{2} \quad (20)$$

$$\mathbf{N} = 0 \quad (21)$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \quad (22)$$

$$\mathbf{A} = a \quad (23)$$

$$\mathbf{B} = 1 \quad (24)$$

$$(25)$$

Unter der Bedingung, dass $q \geq 0$:

$$\mathbf{Q} = \frac{q}{2} \geq 0 \quad (26)$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \geq 0 \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (28)$$

Somit sind alle Forderungen an die Matrizen (hier: Skalare) erfüllt. Aus $\mathbf{N} = 0$ vereinfacht sich Gleichung (7) stark:

$$\mathbf{Q} + \mathbf{P}_* \mathbf{A} + \mathbf{A}^* \mathbf{P}_* - \mathbf{P}_* (\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^*) \mathbf{P}_* = 0 \quad (29)$$

$$\frac{q}{2} + 2aP_* - 2P_*^2 = 0 \quad (30)$$

$$P_* = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{q}{4}} \quad (31)$$

Theorem 1.2 ([Luk69]) fordert, dass \mathbf{P}_* positiv definit sei. Aus diesem Grund entfällt die zweite Lösung unter der Bedingung, dass $g > 0$ angenommen wird.

Somit lässt sich \mathbf{D}_* bestimmen:

$$\mathbf{D}_* = -\mathbf{R}^{-1} (\mathbf{N}^* + \mathbf{B}^* \mathbf{P}_*) = -2P_* = -a - \sqrt{a^2 + q} \quad (32)$$

Als Eingang für das vereinfachte System ergibt sich:

$$u_* = D_* x = \left(-a - \sqrt{a^2 + q} \right) x = u_*^{(1)}(x) \quad (33)$$

Die Zielfunktion kann nun mit Hilfe der Lösung von (31) ermittelt werden:

$$J(\cdot) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_* \mathbf{x} = \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{q}{4}} \right) x^2 = J_*^{(2)}(x) \quad (34)$$

Bestimmung der Terme höherer Ordnung (vgl. [Luk69] S.94)

Durch Lösen der Gleichungen (13) und (14) lassen sich J_* und u_* sukzessive neu bestimmen.

$$J^{(3)}(x) = 0 \quad (35)$$

$$u_*^{(2)}(x) = 0 \quad (36)$$

$$J^{(4)}(x) = \frac{q}{96\sqrt{a^2+q}}x^4 \quad (37)$$

$$u_*^{(3)}(x) = -\frac{q}{24\sqrt{a^2+q}}x^3 \quad (38)$$

$$J^{(5)}(x) = 0 \quad (39)$$

$$u_*^{(4)}(x) = 0 \quad (40)$$

$$J^{(6)}(x) = \frac{1}{6\sqrt{a^2+q}} \left(\frac{q}{720} - \frac{1}{288} \frac{q^2}{a^2+q} \right) x^6 \quad (41)$$

$$u_*^{(5)}(x) = -\frac{1}{\sqrt{a^2+q}} \left(\frac{q}{720} - \frac{1}{288} \frac{q^2}{a^2+q} \right) x^5 \quad (42)$$

Somit ergibt sich als Feedback für eine Entwicklung bis zur 5. Ordnung:

$$u_*(x) = \left(-a - \sqrt{a^2+q} \right) x - \frac{q}{24\sqrt{a^2+q}}x^3 - \frac{1}{\sqrt{a^2+q}} \left(\frac{q}{720} - \frac{1}{288} \frac{q^2}{a^2+q} \right) x^5 \quad (43)$$

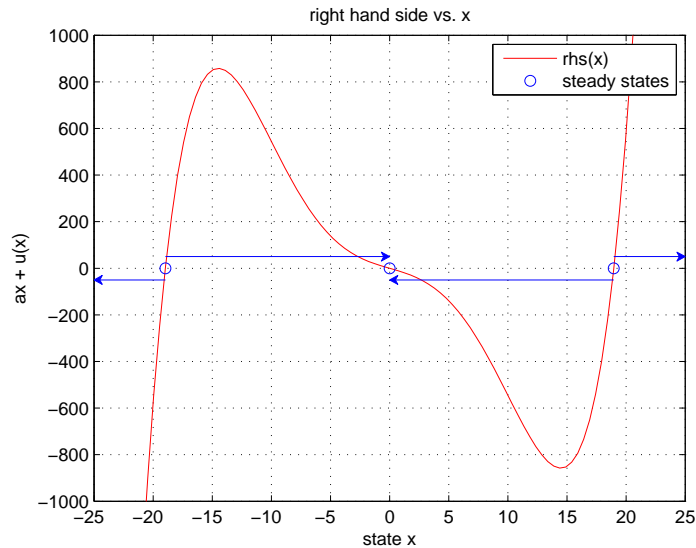
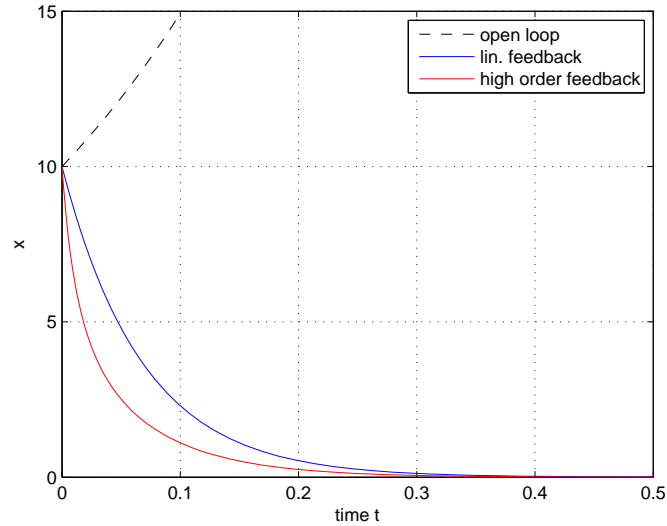
2.2 Vergleich von linearem und nichtlinearem Feedback für spezielle q und a

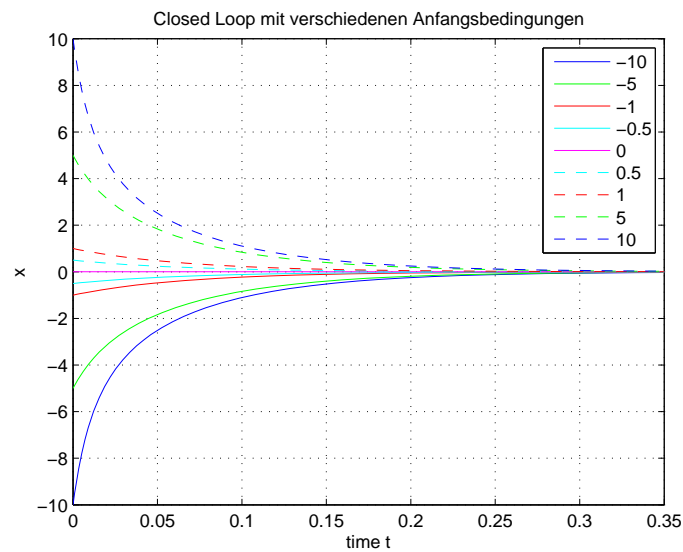
Abbildung 1: Rechte Seite(43) als Funktion des Zustands x

Abbildung 2: Vergleich *open loop* und *closed loop*

Man erkennt leicht, dass das unregelte System instabil ist. Durch die lineare Regelung wird es stabilisiert.

2.3 Simulationen für verschiedene Anfangsbedingungen und Variation von q

Anfangsbedingungen Die folgende Abbildung stellt den Einfluss der Anfangsbedingung x_0 auf die Lösung des geregelten Systems dar.

Abbildung 3: Einfluss der Anfangsbedingung x_0

Parameterstudie q Abbildung 4 zeigt, dass bei höheren Werten von q das System den Ursprung schneller erreicht.

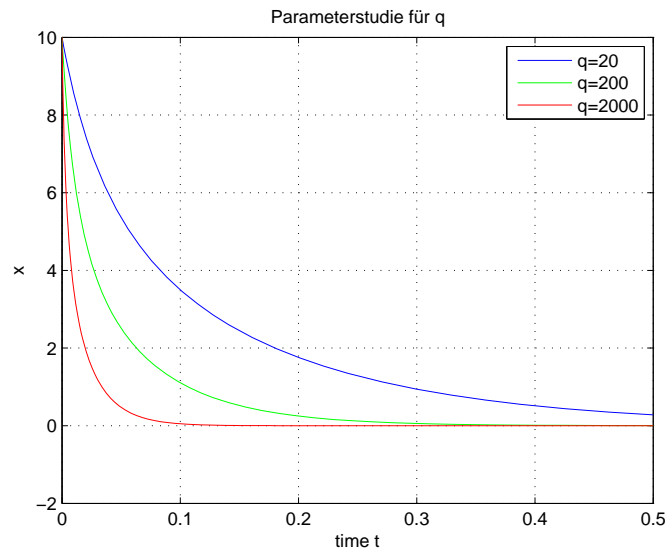


Abbildung 4: Einfluss des Parameters q auf die Dynamik des Systems

Literatur

[Luk69] D.L. Lukes. Optimal regulation of nonlinear dynamical systems. In *SIAM J. Contr.*, volume 7(1), pages 75–100. 1969.